View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Universitas Hasanuddin: e-Journals

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 2, 138-146, Januari 2014
ISBN:1858-1382

Keragaman Bahasa Matematika Untuk Satu Konsep Matematis Yang Sama

Loeky Haryanto[†]

Abstrak

Dengan menggunakan banyak contoh, tulisan ini membahas fakta-fakta bahwa satu konsep matematika bisa dinyatakan atau dikomunikasikan dengan beberapa bahasa matematika yang masih bernuansa bahasa sehari-hari dengan cara yang berbeda-beda, efisien dan tidak multitafsir. Sebagai ilustrasi satu kosnep matematika yang bisa disajikan dengan beberapa cara yang berbeda, diberikan tiga contoh struktur matematis: himpunan polinom-polinom berderajat 1 yang terdapat dalam Aljabar Boole tiga peubah dari disiplin logika formal, geometri Euklid *EG*(3,2) dari geometri dan kode Reed-Muller *RM*(1,3) dari '*coding theory*'. Masing-masing struktur bisa digunakan secara terpisah untuk membahas satu konsep matematis yang sama. Karena sebagai alat komunikasi bahasa matematika bersifat universil dengan semesta pembicaraan berupa entitas-entitas abstrak yang hanya ada di alam pikiran, maka pilihan metoda pendidikan dan pengajaran (bahasa) matematika tidak bisa disamakan dengan metoda pendidikan dan pengajaran pada disiplin atau ilmu-ilmu yang lain.

Keywords: *Aljabar Boole, Geometri Euklid, kode Reed-Muller, bahasa universal.*

1. Pendahuluan

Sudah tercatat dalam sejarah bahwa satu konsep matematika bisa diterapkan pada banyak penerapan yang berbeda, walaupun kadang-kadang memerlukan waktu lama untuk bisa diterapkan. Misalnya, konsep teori peluang telah diterapkan pada puluhan bidang yang berbeda-beda, misalnya dalam berbagai cabang statistik, proses stokastik, fisika kuantum, teori pengkodean, dan sebagainya. Ketika George Boole menulis '*The Laws of Thoughts*' (Hukum-Hukum Pikiran) yang isinya menjadi landasan logika formal saat ini, ia tidak tahu bahwa delapan puluh empat tahun kemudian teorinya bisa diterapkan oleh Claude Shannon dalam perancangan sirkuit elektronik.

Makalah ini lebih jauh membahas dan memberikan fakta-fakta berupa contoh-contoh konsep matematis yang bisa dinyatakan dengan berbagai bahasa matematika dan dilanjutkan dengan pembahasan dampak fakta ini pada proses belajar matematika.

2. Matematika Sebagai Bahasa Universal

Fungsi utama dari suatu bahasa adalah sebagai alat komunikasi atau untuk berkomunikasi sedangkan salah satu komponen utama dari suatu bahasa adalah lambang, baik lambang yang dinyatakan dengan cara lisan, misalnya kata-kata yang terdapat dalam berbagai bahasa sehari-hari: bahasa Inggris, Indonesia, Latin, dan sebagainya, atau yang dinyatakan dengan cara tulisan, misalnya angka-angka, huruf-huruf, gambar-gambar, rumus-rumus matematika, dan sebagainya.

Setiap lambang menunjuk pada suatu benda (denotasi lambang) yang dilambangkannya. Benda-benda ini bisa berbentuk nyata, bisa berbentuk abstrak, bisa pula hanya terdapat di suatu tempat (misalnya lambang 'Kangguru'), atau sebaliknya bisa dijumpai

[†] *Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

di banyak tempat. Bahkan ada pula benda-benda (abstrak) yang hanya berada di dalam pikiran manusia (normal) yang tentu saja tak akan terlihat, tak bisa dipegang atau dirasakan secara fisik. Khususnya dalam kasus bahasa matematika, semua benda yang dilambangkan oleh bahasa matematika hanya terdapat dalam pikiran manusia. Jadi bilangan yang dilambangkan ‘3’ hanya terdapat dalam pikiran. Saat sekarang anda sedang melihat *lambang* (bukan melihat benda/bilangan yang dilambangkan ‘3’) di halaman kertas yang memuat paper ini.

Bilangan bulat berlambang ‘3’ adalah satu contoh lambang matematika - contoh sebuah benda abstrak - yang masih bisa dimengerti maknanya dan masih terjangkau keberadaannya oleh seorang manusia normal yang bisa berpikir, termasuk oleh anak-anak yang belum atau tak pernah sekolah. Secara lisan atau tulisan, masing-masing individu menggunakan bahasa ibu (*mother tongue*) atau lambang tertulis yang berbeda satu sama lain untuk melambangkan bilangan tersebut. Misalnya orang Inggris melambangkan bilangan tersebut secara lisan atau tulisan dengan kata ‘three’ sedangkan orang Jawa melambangkannya dengan kata ‘telu’.

Lebih jauh, semua konsep-konsep matematika kontinu hanya menjadi model *pendekatan* dari fenomena nyata, sebab semua konsep matematika seperti ‘segitiga’, ‘bujur sangkar’, ‘seperempat’, dan seterusnya hanya bisa *didekati*, tak bisa dinyatakan secara persis oleh benda-benda nyata. Misalnya, memotong ‘seperempat’ kue tidak akan bisa secara tepat menghasilkan seperempat bagian kue tersebut. Walaupun demikian, berbagai konsep matematika diskrit dengan model hingga bisa langsung diterapkan secara persis ke femena nyata.

Sesungguhnya *setiap* konsep matematis terletak di dalam suatu alam ideal tetapi universal, yaitu (*satu*) konsep tersebut bisa berada di dalam pikiran jutaan manusia yang *berbeda-beda* dari ribuan suku bangsa yang *berbeda-beda*. Keberadaan satu alam ideal (di dalam pikiran kita) yang memuat obyek-obyek abstrak matematis sudah disinggung ribuan tahun yang lalu oleh seorang pemikir Yunani, yaitu Plato. Karena itulah, matematikawan Roger Penrose dalam [5] menyebut alam di dalam pikiran ini sebagai *Platonic world.*

Jadi setiap suku bangsa dan setiap etnis, apa pun bahasa lisan dan tulisan yang digunakannya, telah terbukti mengenal dan memiliki *secara bersama-sama* beberapa konsep matematis, walaupun untuk berkomunikasi satu sama lain (khususnya di masa lalu) dan untuk menunjuk konsep-konsep bersama yang sama tersebut, mereka menggunakan lambang ciptaan masing-masing. Misalnya, masing-masing suku/etnis memakai lambang yang berbeda-beda untuk bilangan yang berlambang ‘3’. Ini merupakan indikasi kuat, kalau tidak bisa dikatakan suatu bukti, bahwa setiap konsep matematis bersifat universal.

3. Bahasa Komunikasi Yang Efisien dan Tak Bermakna Ganda

Pengaruh globalisasi secara tak sengaja menciptakan kompetisi antar bahasa yang membuat sebagian bahasa-bahasa yang pernah ada atau yang tak bisa mengikuti tuntutan jaman dilupakan orang atau hanya dipakai secara terbatas. Operasi tambah dan operasi kali antar bilangan bulat dalam ilmu hitung dimiliki oleh berbagai suku bangsa, tetapi cara penyajian dan metoda yang digunakan oleh masing-masing suku bangsa tersebut di masa lalu bisa berbeda satu sama lain. Di masa sekarang, hampir semua turunan suku-suku bangsa tersebut menggunakan satu sistem bilangan yang sama dalam berhitung, yaitu sistem yang diadopsi dari sistem bilangan Yunani.

Untuk menjelaskan penyebabnya, bandingkan notasi angka orang Yunani dan Romawi kuno. Walaupun bangsa Romawi kuno ketika menulis angka ‘I’ dan ‘V’ dan bangsa Yunani kuno ketika menulis angka ‘1’ dan ‘5’ sama-sama menunjuk bilangan yang identik, tetapi untuk menunjuk bilangan-bilangan yang lebih besar kedua suku bangsa ini menggunakan metoda yang sama sekali berbeda. Misalnya, walaupun kedua pasang angka di atas bisa ditulis dengan cara yang sama, yaitu keduanya diletakkan secara berurutan: ‘IV’ dan ‘15’, kedua lambang yang dihasilkan dengan dua pasang angka ini menunjuk dua bilangan yang sama sekali berbeda. Cara penulisan oleh kedua bangsa kuno ini, walaupun secara visual terlihat sama, tetapi pemaknaanya (semantiknya) bisa berbeda jauh.

Tuntutan efisiensi dan komputerisasi telah membawa sistem bilangan Yunani menjadi lebih unggul dan populer daripada sistem bilangan Romawi. Sesungguhnya bangsa Yunani telah membuat sistem penulisan bilangan yang sangat efisien berdasarkan metoda bilangan basis 10 yang oleh para matematikawan dan oleh pakar komputer dengan mudah bisa ditransformasi menjadi sistem bilangan dengan bilangan basis yang lain, misalnya sistem bilangan biner yang berbasis bilangan 2.

Efisiensi dari sistem bilangan menggunakan basis akan terasa lebih nyata bagi mereka yang pernah mempelajari algoritma dan implementasi operasi tambah dan operasi kali antar bilangan, misalnya dalam pembuatan sirkuit digital. Sebaliknya dengan menggunakan angka-angka Romawi, implementasi perkalian CLV $\times$ DCI menjadi sangat tidak efisien dibandingkan perkalian dua bilangan yang sama tetapi menggunakan sistem yang diadopsi dari sistem bilangan bangsa Yunani, 155×601.

Ada keunggulan-keunggulan lain apabila kita meminjam sistem bilangan Yunani, misalnya ketika mengajarkan perkalian 200×4000 kepada anak-anak SD, kita cukup meminta mereka menghitung 2×4 dan menambahkan lima buah angka 0 di belakang hasil kalinya, cara yang tidak bisa diterapkan pada sistem bilangan Romawi. Cara mengajar ini sahih (bisa dipertanggungjawabkan secara ilmiah) sebab berdasarkan bilangan basis 10,

$$200 = 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 0 \times 10^0 = 2 \times 10^2$$

Demikian pula, $4000 = 4 \times 10^3$. Jadi dengan menggunakan hukum pengelompokkan (asosiatif) dan hukum pertukaran (komutatif), diperoleh

$$\begin{aligned} 200 \times 4000 &= (2 \times 10^2) \times (4 \times 10^3) \\ &= 2 \times (10^2 \times 4) \times 10^3 \\ &= 2 \times (4 \times 10^2) \times 10^3 \\ &= (2 \times 4) \times (10^2 \times 10^3) \\ &= 8 \times 10^5 \end{aligned}$$

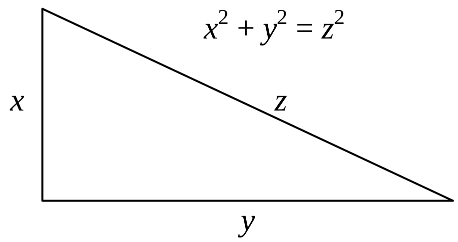
Karena setiap bahasa memiliki aturan dan struktur khusus, misalnya aturan penulisan (sintaks) dan aturan penafsiran makna (semantik), baik dalam bentuk tata-bahasa atau dalam bentuk-bentuk aturan lain, sesungguhnya setiap pemakai suatu bahasa perlu mempelajari sistem dalam bahasa tersebut, baik berupa sintaks atau semantik, atau aturan cara komunikasi yang lain, untuk bisa berkomunikasi secara lancar dengan menggunakan bahasa tersebut.

Sayangnya, tak semua bagian dari sebuah bahasa bisa dipelajari dengan mudah oleh pemakai bahasa lain. Sebab bisa saja semua pelajar lulusan SLTA sudah mampu menulis angka-angka dalam kata-kata bahasa Inggris, seperti halnya setiap anak-anak lulusan SD sudah mampu menulis dan menambahkah bilangan-bilangan bulat, tetapi hal ini tidak bisa ditafsirkan bahwa para pelajar tersebut sudah bisa berbahasa Inggris, atau anak-anak SD tersebut sudah menguasai bahasa matematika.

Angka ‘3’ adalah sebuah contoh yang paling sederhana dari sebuah lambang matematika dan umumnya setiap orang tak perlu belajar matematika dalam waktu lama untuk bisa memahami makna angka tersebut. Tetapi tak semua konsep bahasa matematika bisa dipahami semudah memahami konsep bilangan bulat dan operasi tambah antara bilangan bulat, sebab setiap bahasa memiliki bagian-bagian yang mudah dipelajari dan bagian-bagian yang sangat sulit untuk dipelajari.

Sebuah contoh lambang yang memerlukan waktu relatif lama untuk bisa memahaminya, paling tidak membutuhkan waktu belajar matematika secara formal sampai ke tingkat Sekolah Menengah Pertama (SMP), adalah lambang berupa gambar-gambar dengan sedikit huruf dan teks berikut.

(1)



Alat komunikasi atau bahasa lain untuk mengkomunikasikan lambang di atas adalah dengan menggunakan lambang kata-kata berupa kalimat dalam bahasa sehari-hari atau bahasa ibu semacam berikut:

> "Jumlah kuadrat panjang kedua sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku sama dengan kuadrat panjang sisi miringnya".

Ini adalah contoh penggunaan bahasa gado-gado, bahasa matematika dengan nuansa bahasa sehari-hari. Bahasa sehari-hari, bukan bahasa khusus untuk matematika (yang tak pernah secara resmi ditetapkan) tetap diperlukan untuk mengkomunikasikan konsep-konsep matematis sebab bahasa sehari-hari adalah alat komunikasi yang umumnya sudah dikuasai oleh setiap pengguna matematika. Walaupun demikian, bahasa sehari-hari yang dipakai dan digunakan dalam matematika, atau dalam disiplin ilmu yang lain, seringkali mengandung perubahan yang menghasilkan kata-kata, kalimat-kalimat bahkan tata-bahasa baru yang tidak ada dalam bahasa aslinya.

Perubahan atau modifikasi terhadap bahasa sehari-hari biasanya berbentuk penambahan kata-kata bermakna baru, misalnya berbagai istilah teknis (*technical terminologies*) dari suatu disiplin ilmu, bahkan berbentuk perubahan tata-bahasa dan sekaligus lambang-lambangnya. Sebagai contoh, lambang

$$\text{“} \lim_{x \to a} f(\mathrm{x}) = L \text{”}$$

(2)

diadopsi oleh para matematikawan karena maknanya terlalu panjang atau cukup sulit untuk bisa dinyatakan *secara efisien* dan secara 'jelas' dalam bahasa sehari-hari.

Salah satu cara lain untuk menyatakan makna dari lambang (2) adalah dengan menambahkan dan membuat lambang-lambang khusus *secara tertulis* ke dalam bahasa sehari-hari. Dengan tambahan lambang-lambang khusus untuk menyatakan suatu kalimat dalam bahasa sehari-hari, hasil yang diperoleh semacam bentuk tertulis

$$\text{“ } \forall \varepsilon > 0.\ \exists\ \delta > 0.\ \forall\ x \in D_{f.}\ (0 < |\ x - a| < \ \delta \Rightarrow |\ f(x) - L| < \varepsilon) \text{ ”}$$

(3)

seolah-olah menjadi bagian dari suatu bahasa yang sama sekali baru. Padahal bentuk (3) bisa dianggap sebagai singkatan dari suatu kalimat yang terlalu panjang dan terlalu rancu (*ambigious*) untuk ditulis dengan bahasa sehari-hari. Tetapi bagi mereka yang tak cukup lama belajar (bahasa) matematika, penggunaan bahasa sehari-hari secara murni dianggap lebih mudah daripada penggunaan bahasa sehari-hari yang disingkat, semacam pernyataan (3).

Sebaliknya bagi mereka yang sudah mendalami (bahasa) matematika dalam jangka waktu cukup lama, bentuk (3) selain singkat, juga jauh lebih efisien. Hal ini disebabkan matematika sebagai disiplin yang berbasis logika dua nilai (*two-valued logic*) atau logika Benar-Salah (*True-False logic*), negasi dari (3) lebih mudah dilakukan secara otomatis dan kalimat tersebut atau negasinya hanya memiliki dua kemungkinan penafsiran: bernilai 'Benar' atau bernilai 'Salah'.

Secara umum, bahasa matematika yang berbasis logika dua nilai lebih mudah dan lebih berpeluang untuk bisa diimplementasikan ke dalam suatu algoritma, bahkan ke dalam suatu sistem komputer, seperti yang dilakukan oleh para pencipta bahasa komputer Prolog ketika mengimplementasikan konsep-konsep logika ke dalam bahasa komputer tersebut atau oleh para pengguna format (tata-bahasa) Backus-Naur dalam spesifikasi sintaks untuk berbagai bahasa komputer (ALGOL, Java, LISP, ADA, dan sebagainya).

Sebagai ilustrasi kemudahan implementasi bahasa matematika, melambangkan pernyataan (negasi) yang nilai kebenarannya berlawanan dengan nilai pernyataan matematika lain, bisa dilakukan secara sistematis. Misalnya, negasi dari pernyataan (3) dilakukan secara 'otomatis' dengan mengubah semua kuantor (*quantifiers*) dan dilanjutkan dengan membuat negasi semua pernyataan bagian terbuka yang terdapat dalam pernyataan tersebut. Negasi dari pernyataan terbuka di dalam (3) berikut.

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

adalah pernyataan terbuka

$$0 < |x - a| < \delta \;\;\&\;\; |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

Dari sisi pembelajaran matematika, untuk menghindari pola-pola kesalahan pemahaman konsep-konsep matematika, sebuah konsep matematika sebaiknya didefinisikan dengan beberapa lambang, nama, istilah atau cara yang berbeda kadar formalnya. Hal ini disebabkan karena ketika seseorang belajar bahasa apapun yang banyak menggunakan lambang-lambang, nama dan istilah-istilah baru, diperlukan tahapan langkah-langkah agar akrab dengan *vocabulary* dan terbiasa mengekspresikan semua lambang, nama dan istilah yang terdapat dalam bahasa tersebut.

Sebagai contoh, setiap pernyataan berikut adalah ekuivalen satu sama lain dan salah satu pernyataan di antaranya bisa digunakan untuk mendefinisikan pernyataan lain yang ditulis sebelumnya.

a) x adalah bilangan genap
b) x habis dibagi dua
c) x adalah kelipatan 2
d) $x \in \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots\}$.
e) $x = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k
f) terdapat bilangan bulat k sedemikian rupa sehingga $x = 2k$
g) $(\exists k \in \mathbf{Z})(x = 2k)$

Ketujuh pernyataan dengan bahasa 'gado-gado' ini diurutkan agar pernyataan yang lebih belakangan secara umum dinyatakan dalam notasi dengan kadar yang lebih formal dan kurang akrab, yaitu dalam bentuk yang lebih menjauhi bentuk bahasa sehari-hari, daripada notasi pernyataan sebelumnya. Pada khususnya, pernyataan yang lebih formal

e) $x = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k

bisa digunakan untuk mendefinisikan pernyataan dalam bahasa sehari-hari berikut

c) x adalah kelipatan 2

atau

a) x adalah bilangan genap

Efisiensi bahasa matematika yang berbasis logika dua nilai bisa tercapai sebab sistem logika dua nilai sangat berbeda dengan sistem logika dari bahasa sehari-hari yang memungkinkan kebenaran suatu pernyataan bersifat relatif, bisa 'separoh' benar dan bisa 'separoh' salah, bisa juga bernilai banyak bahkan bisa multitafsir, saling kontradiksi atau sama sekali tak memiliki nilai kebenaran (seperti dalam kalimat-kalimat perintah). Sebaliknya setiap pernyataan matematis semacam pernyataan (3) hanya memiliki dua kemungkinan penafsiran: bernilai 'Benar' atau bernilai 'Salah'.

Nilai 'kebenaran' suatu pernyataan dalam bahasa sehari-hari sangat tergantung pada 'Siapa' yang menyatakannya, jadi pada faktor eksternal di luar isi pernyataan itu sendiri. Sebaliknya nilai kebenaran isi suatu pernyataan matematis, misalnya kebenaran pembuktian

Teorema Terakhir Fermat (Lihat [7]), telah disepakati oleh hampir seluruh matematikawan di dunia, walaupun sebagian besar di antara mereka tak mengerti isi pembuktian teorema yang dirintis oleh Andrew Wyles pada tahun 1993 dan baru diterima kebenarannya secara resmi pada tahun 1995.

4. Satu Konsep Matematika dengan Tiga Bahasa Matematika

Pada Bagian 3 telah diberikan banyak contoh lambang-lambang matematika, misalnya angka-angka, yang berbeda-beda walaupun menunjuk satu konsep matematis (misalnya bilangan) yang sama. Sejauh ini, contoh konsep yang diberikan masih sangat sederhana dan sebagian besar bahasa yang diperlukan untuk mengkomunikasikannya masih didominasi oleh penggunaan lambang-lambang.

Dalam seksi ini akan dibahas secara khusus satu konsep yang cukup canggih sehingga untuk mengkomunikasikannya diperlukan konsep matematis tingkat lanjut yang memerlukan tiga cabang matematika dari disiplin logika formal, khususnya aljabar Boole, teori pengkodean dan disiplin geometri Euklid. Karena hanya sebagai ilustrasi, ketiga konsep ini akan dibahas secara selintas dan umum, tidak mendalam.

Aljabar Boole yang terdiri atas semua ekspresi atau polinom berderajat paling tinggi n yang direntang oleh dua konstan **0** dan **1** serta n peubah x_1, x_2, x_3, …, x_n bersama dua operator biner tambah '+' dan operator kali dalam notasi *juxtaposition* (yang tak memerlukan lambang) serta satu operator uner '$\bar{\ }$' sedemikian rupa sehingga memenuhi beberapa aksioma-aksioma. Sebagai akibat definisi dan aksioma-aksioma ini, diperoleh bermacam-macam sifat, misalnya $\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$, $x + x = x = xx$, dan sebagainya, termasuk sifat terkenal yang disebut *Hukum de Morgan*: $\overline{(x+y)} = \bar{x}\,\bar{y}$.

Dalam aljabar Boole tiga peubah, kode Reed-Muller $RM(1,3)$ didefinisikan sebagai himpunan semua polinom-polinom dalam tiga peubah yang berderajat paling tinggi 1. Penjelasan singkat kode Reed-Muller yang didefinisikan sebagai ruang vektor biner atau sebagai salah satu ruang dalam geometri Euklid akan lebih mudah dilakukan setelah diberikan tabel berikut yang bukan hanya menunjukkan adanya korespondensi satu-satu di antara unsur-unsur ketiga struktur matematis di atas, tetapi juga adanya kesesuaian struktur-struktur matematis di dalam masing-masing konsep.

Dalam tabel berikut, operator '$\bar{\ }$' apabila dikenakan pada polinom $p(x, y, z)$ tidak akan ditulis sebagai

$$\overline{p(x,y,z)}$$

tetapi akan ditulis sebagai

$$1 + p(x, y, z)$$

SUB-ALJABAR BOOLE	**KODE *RM*(1, 3)**	**GEOMETRI EUKLID EG(3,2)**
0	0 0 0 0 0 0 0 0	∅
1	1 1 1 1 1 1 1 1	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
z	1 1 1 1 0 0 0 0	{0, 1, 2, 3}
y	1 1 0 0 1 1 0 0	{0, 1, 4, 5}
x	1 0 1 0 1 0 1 0	{0, 2, 4, 6}
$y + z$	0 0 1 1 1 1 0 0	{2, 3, 4, 5}
$x + z$	0 1 0 1 1 0 1 0	{1, 3, 4, 6}
$x + y$	0 1 1 0 0 1 1 0	{1, 2, 5, 6}
$x + y + z$	1 0 0 1 0 1 1 0	{0, 3, 5, 6}
$1 + z$	0 0 0 0 1 1 1 1	{4, 5, 6, 7}
$1 + y$	0 0 1 1 0 0 1 1	{2, 3, 6, 7}

$1 + x$	0 1 0 1 0 1 0 1	{ 1, 3, 5, 7}
$1 + y + z$	1 1 0 0 0 0 1 1	{0, 1, 6, 7}
$1 + x + z$	1 0 1 0 0 1 0 1	{0, 2, 5, 7}
$1 + x + y$	1 0 0 1 1 0 0 1	{0, 3, 4, 7}
$1 + x + y + z$	0 1 1 0 1 0 0 1	{ 1, 2, 4, 7}

Sumber: ([1], Fig. 5.4), dengan sedikit modifikasi dan tambahan.

Dalam bahasa vektor biner, struktur kode Reed-Muller *RM*(1, 3) tak berbeda jauh dengan struktur ruang vektor elementer lainnya. Yang perlu diperhatikan adalah bobot (banyaknya bit-1) minimum dari setiap vektor biner dalam *RM*(1, 3) adalah 4, selain sifat tertutup terhadap operator '+' dan terhadap jumlahan dengan vektor **1** = 11111111. Jadi jika **u**, **v** $\in$ *RM*(1, 3), maka **u** + **v** $\in$ *RM*(1, 3) dan **1** + **u** $\in$ *RM*(1, 3).

Sebagai ruang geometri Euklid EG(3, 2), unsur-unsur dari kode Reed-Muller *RM*(1, 3) adalah himpunan-himpunan yang bersifat tertutup terhadap operator selisih simetri (*symmetric difference*) dan terhadap operator komplemen. Kecuali himpunan kosong $\emptyset$, banyaknya bilangan dalam setiap himpunan (yang berperan sebagai unsur) dalam EG(3, 2) paling sedikit adalah 4, kalau bukan 6 atau 8.

Warna geometri dalam EG(3, 2) bisa diperoleh apabila setiap bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ditafsirkan sebagai delapan buah titik-titik (a, b, c) dalam ruang vektor biner $GF(2)^3$, misalnya melalui pengawanan 1-1 sbb: 0 $\rightarrow$ 000, 1 $\rightarrow$ 001, 2 $\rightarrow$ 010, 3 $\rightarrow$ 011, 4 $\rightarrow$ 100, 5 $\rightarrow$ 101, 6 $\rightarrow$ 110 dan 7 $\rightarrow$ 111 (Lihat [2]). Dengan demikian, konsep sebuah 'garis' dan 'bidang' bisa didefinisikan dalam $GF(2)^3$ seperti halnya kita mendefinisikan konsep garis (ruang vektor berdimensi 1) dan bidang (ruang vektor berdimensi 2) pada ruang vektor Euklid real R^3.

Sebagai ruang vektor biner, kode *RM*(1, 3) juga dilengkapi dengan operator biner yang bersesuaian dengan operator *symmetric difference* dalam EG(3,2). Lebih jauh, konsep dual dalam *RM*(1, 3), yang didefinisikan melalui konsep ketegaklurusan (*ortogonality*) bersesuaian dengan konsep dual dalam aljabar Boole yang didefinisikan lewat operator uner komplemen dan hasil dual kedua konsep ini secara sempurna bisa bersesuaian satu sama lain.

Pembahasan lebih rinci mengenai kode Reed-Muller *RM*(1, *m*) dan geometrinya bisa dijumpai dalam banyak buku teks, misalnya dalam [3]. Untuk pengenalan aljabar Boole elementer (dan juga bahasa formal elementer), silakan baca [6].

5. Pendidikan dan Pengajaran Matematika

Selama ini, berbagai teori-teori pendidikan dan pengajaran dalam beberapa disiplin, termasuk matematika, selalu menekankan perubahan terhadap faktor-faktor di luar materi disiplin atau di luar ilmu itu sendiri tanpa memperhatikan perbedaan proses internal pihak yang belajar (*learner*), termasuk prilaku mental dan pola pikir para pelajar dan mahasiswa, yang bersifat tergantung (*dependent*) pada jenis disiplin.

Padahal proses internal yang mendominasi prilaku mental dan pola pikir seseorang ketika sedang melakukan penarikan kesimpulan data-data statistik, atau ketika belajar mengemudi mobil, berbeda dengan proses internal yang terjadi ketika seseorang berusaha membuktikan kebenaran pembuktian sebuah teorema matematis atau ketika berusaha memahami ekuivalensi dari kedua pernyataan (2) dan (3).

Walaupun dalam teori jenjang berpikir kognitif Bloom menggunakan istilah-istilah semacam 'menghapal', 'memahami', dan seterusnya, yang jelas-jelas merupakan proses internal yang terjadi di dalam pikiran individu yang belajar (seorang pelajar atau mahasiswa, misalnya), tetapi dalam usaha mengarahkan dan memperbaiki proses proses dalam ranah kognitif ini, mayoritas ‘pakar’ dan praktisi pendidikan lebih banyak memberikan rangsangan (*stimuli*) yang mendorong faktor-faktor eksternal di luar materi disiplin itu sendiri: misalnya merangsang perubahan lingkungan kelas dan lingkungan sekolah, perubahan prilaku pengajar atau fasilitator yang diasumsikan akan diikuti oleh perubahan prilaku (fisik dan mental?) *learner*, tanpa memperhatikan *discipline-depedency* ketergantungan *learner* pada perbedaan proses internal yang harus dilakukan oleh subyek relatif terhadap obyek, atau terhadap jenis disiplin ilmu yang sedang dipelajarinya.

Kalau pun ada model kurikulum instruksional yang diseragamkan untuk setiap mata ajaran, tetapi pemilihan kumpulan instruksi-instruksi yang harus diberikan dalam kurikulum tersebut selalu menjadi bahan perdebatan sehingga tidak bersifat universil, selain multitafsir. Lebih jauh, implementasi suatu kurikulum yang sama pun bisa berbeda-beda, tergantung pada individu-individu yang melaksanakannya.

Multitafsir terhadap instruksional dalam kurikulum disebabkan oleh fakta bahwa para penyusun kurikulum instruksional masih tergantung pada interpretasi masing-masing, kalau tidak bisa dikatakan saling menebak-nebak, tentang proses yang terjadi secara internal, dalam pikiran seorang anak misalnya ketika anak tersebut sedang belajar dalil Pythagoras, dan kemudian membuat asumsi, kalau bukan tebakan semata, adanya perbedaan proses internal anak tersebut dengan proses internal (yang dikira-kiranya) sedang terjadi ketika anak yang sama sedang belajar bahasa Inggris.

Kesimpulan bagian ini, khusus untuk telaah pendidikan/pengajaran matematika, ada baiknya metoda pembelajaran suatu materi matematika cukup disesuaikan dengan isi materi matematika tersebut yang jelas-jelas tidak multitafsir, bukan pada proses belajar internal - misalnya lewat jenjang proses belajar kognitif sesuai taxonomi Bloom - yang *diperkirakan* sedang terjadi ketika seseorang mempelajari materi matematika tersebut.

Pada berbagai disiplin ilmu yang didominasi oleh ketrampilan yang dalam taksonomi Bloom masuk dalam ranah psikomotorik atau pada disiplin ilmu yang lebih menekankan proses pengamatan data fisik dan penarikan kesimpulan (*inference*) dari hasil pengamatan secara fisik ini, mungkin saja penerapan taksonomi Bloom cukup sahih (bisa dipertanggung-jawabkan secara ilmiah). Tetapi dalam proses pendidikan dan pengajaran matematika yang secara internal memiliki warna tersendiri, faktor-faktor eksternal yang mendapat rangsangan perubahan bisa saja menjadi faktor-faktor sekunder.

Untuk mengetahui pandangan seorang matematikawan tentang proses berpikir matematis dan logis, selain pandangannya tentang logika dan matematika itu sendiri, penulis menganjurkan pembaca agar membaca tulisan Roger Penrose dalam [4], walaupun [4] sesungguhnya ditulis dengan tujuan untuk menyanggah anggapan bahwa otak manusia bisa ditiru, paling tidak secara teoritis, seperti asumsi sebagian pendukung AI (*artificial intelligent*), termasuk salah satu perintis AI, yaitu pakar bahasa formal dan *linguistics* Noam Chomsky.

6. Penutup

Tulisan ini ingin mengajak semua pendidik dan pengajar matematika untuk memperhatikan salah satu faktor yang sangat jarang atau tak pernah dibahas oleh para ‘pakar’ di bidang pendidikan, yaitu faktor matematika sebagai bahasa universal yang membuat proses penguasaan (bahasa) matematika secara mental menjadi jauh berbeda dengan proses penguasaan disiplin ilmu-ilmu lain, selain berbeda jauh dengan proses penguasaan bahasa sehari-hari.

Dengan melihat matematika sebagai obyek dengan berbagai sifat-sifat internal yang unik, pengajaran dan pendidikan matematika pada hematnya memerlukan model dan metoda pendidikan dan pengajaran tersendiri. Sebagai indikasi kuat keberadaan sifat unik dari hasil proses pembelajaran matematika, para matematikawan dengan (alat komunikasi) matematika secara bersama-sama selalu bisa bersepakat terhadap ribuan, bahkan jutaan, konsep-konsep matematis yang bersifat abstrak dan tak bisa diamati, walaupun seringkali keberadaan para matematikawan ini secara fisik terpisah satu sama lain oleh jarak ribuan kilometer dan juga terpisah oleh jangka waktu yang berjarak ratusan tahun.

Daftar Pustaka

[1]. Haryanto, L., 2000, "Constructing snake-in-the-box codes and families of such codes covering the hypercube", *Ph.D. Dissertation*, Delft University of Technology, Netherlands.

[2]. Haryanto, L., Zanten, A.J.van, 2004, "Snakes-in-the-box codes and Euclidean geometry", *Proc. of the 9th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, June 19-25, 2004, Kranevo, Bulgaria.

[3]. MacWilliams, F.J., Sloane, N.J.A., 1977, "*The Theory of Error Correcting Codes*", North Holland Mathematical Library.

[4]. Penrose, R., 1989, "*The Emperor's New Mind*", Oxford University Press.

[5]. --------------, 2005, "*The Road to Reality*", Vintage Books, London.

[6]. Rosen, K., 1999, "*Discrete Mathematics and Its Applications*", McGraw-Hill.

[7]. Singh, S., 1997, "*Fermat's Last Theorem*", Fourth Estate.